BIRINCHI DARAJALI IKKI NOMA'LUMLI DIOFANT TENGLAMALARINING BUTUN RATSIONAL YECHIMLARINI TOPISH USULLARI

Ashurova Dilfuza Nabiyevna
P.f.f.d.(PhD), dotsent, dilfuz_2007@mail.ru, tel: +99890-731-85-06
Xalilov Abror Uchqun o'g'li
Navoiy Davlat pedagogika instituti, magistrant

Annotatsiya.

Maqolada Diofantning birinchi darajali ikki noma`lumli *ax* + *by* = *c* ko'rinishdagi tenglamasi hamda bu tenglamalarni yechishga oid namunaviy misollar keltirilgan. Shuningdek, tenglamalarning ildizlari butun son bo'lmaslik hamda ildizlari musbat son bo'lmaslik alomatlari ham keltirib o'tilgan.

Kalit so'zlar:

Aniqmas tenglama, tenglamaning yechimlari, musbat son bo'lmaslik alomati, butun son bo'lmaslik alomati, juft ildizlar, formulalarning birinchi hadi, formulalarning ikkinchi hadi.

Tenglamalarning butun yechimlarini topish matematikaning, xususan, sonlar nazariyasi fanining muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Bu kabi masalalarning eng sodda ko'rinishlari bilan taniqli matematik olim Diofant (er. III-asr) shug'ullangan. Shuning uchun bunday tenglamalar Diofant tenglamalari deb nomlanadi. Diofant tenglamalari juda katta nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lib, juda ko'p amaliy va iqtisodiy masalalar Diofant tenglamalari orqali yechiladi. Shu sababli keyingi yillarda bunday tenglamalar va ular orqali yechiladigan masalalar maxsus maktab dasturlariga hamda olimpiada masalalari turkumiga kiritilgan. Shu nuqtai nazardan Diofant tenglamalarini o'rganish bugungi kunda dolzarb masalalardan biridir.

Aniqmas tenglama – bu Diofant tenglamalaridir. Birinchi darajali ikki noma'lumli aniqmas tenglama deb, $ax+by+c=0$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bunda x, y lar noma'lumlar, a, b, c lar parametrlar (koeffitsiyentlar).

Ko'pincha masalaning shartlari shunday bo'ladiki, faqat butun sonlar bilan ifodalangan qiymatlargina, ba'zan esa faqat butun va shu bilan birga musbat sonlar bilan ifodalangan qiymatlargina masalada qo'yilgan savolga to'g'ri javob bo'la oladi.

1-masala. 118 ni shunday ikki bo'lakka ajritish kerakki, ulardan biri 11 ga, ikkinchisi 17 ga qoldiqsiz bo'linsin.

Sonlardan birini $11x$, ikkinchisini $17y$ bilan belgilasak, $11x+17y=118$ tenglama hosil bo'ladi.

Masalada 118 ni ajratishdan hosil bo'ladigan sonlarning ishoralari to'g'risida hech narsa aytilmagani uchun manfiy ildizlar ham masalaga javob bo'la oladi deya olamiz. Mazkur masalaning shartlarini ($x=3$ va $y=5$ bo'lganda) 33 va 85 dan iborat sonlar qanoatlantiradi, lekin $x=20$ va $y=-6$ bo'lganda 220 va –102 dan iborat sonlar ham qanoatlantiradi.

2-masala. Biriga 4 ta, ikkinchisiga 7 ta samovar sig'adigan ikki xil yashik bor. 41 ta samovarni joylash uchun har qaysi xil yashikdan nechta olish kerak?

Kichik yashiklarning sonini x bilan, kattalarining sonini y bilan belgilab, ushbu tenglamani tuzamiz:

$4x+7y=41$.

Masalaning shartidan bunda faqat butun va shu bilan birga musbat ildizlarigina yaroqli ekani ochiq ko'rinib turadi. Bu tenglama $x=5$, $y=3$ dan iborat faqat bir juftgina ildizga ega bo'la oladi.

Shunday qilib, aniqmas tenglamalarning butun sonlar bilan hamda butun va musbat butun sonlar bilan ifoda qilingan ildizlarini topa bilishimiz zarur.

Tenglamalarning ildizlari butun son bo’lmaslik alomati.

Quyidagi

$$ax+by=c$$

tenglama berilgan bo’lsin. Agar a,b,c koeffitsiyentlardan ba’zilari kasr bo’lsa, barcha koeffitsiyentlarni bir maxrajga keltirib, keyin maxrajni tushirib qoldirsak, u holda barcha koeffitsiyentlar butun bo’ladi. So’ngra a,b,c larning biror umumiy ko’paytuvchisi bo’lsa, tenglamaning ikkala qismini unga qisqartirish mumkin. Demak, a, b va c koeffitsiyentlarni umumiy ko’paytuvchisi bo’lmagan butun sonlar deb faraz qilamiz.

Endi a va b birorta butun, lekin 1 ga teng bo’lmagan umumiy ko’paytuvchiga ega, deb faraz qilamiz. Masalan:

$$a=ma_1,\ b=mb_1.$$

Bu holda tenglama ushbu ko’rinishni oladi:

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{m}.$$

x va y larning qiymatlari butun bo’lsa, tenglamaning chap qismi butun, o’ng qismi esa kasr son bo’ladi, chunki yuqoridagi farazimizga muvofiq, c son m ga bo’linmaydi. Bunday tenglikning bo’lishi mumkin emas. Demak, agar aniqmas tenglama noma’lumlarining koeffitsiyentlari umumiy ko’paytuvchiga ega bo’lib, ozod had unga ega bo’lmasa, tenglama butun ildizlarga ega bo’lmaydi.

Tenglamalarning ildizlari musbat son bo’lmaslik alomati.

$ax+by=c$ tenglamada a va b koeffitsiyentlar musbat, ozod had c manfiy bo’lsin. U holda x va y ning har qanday musbat qiymatlarida tenglamaning chap qismi musbat, o’ng qismi esa manfiyligicha qoladi. Bunday tenglik bo’lishi mumkin emas. Agar a va b koeffitsiyentlar manfiy, c musbat bo’lsa, tenglamaning barcha hadlarini -1 ga ko’paytirib, bu holni ham oldingi holga keltiramiz. Demak, agar aniqmas tenglamada noma’lumlarning koeffitsiyentlarining ishoralari ozod had ishorasiga qarama-qarshi bo’lsa, tenglama musbat ildizga ega bo’lmaydi.

Aniqmas (Diofant) tenglama ildizlarining umumiy formulasi.

Biror usul bilan (masalan, bevosita sinash yo’li bilan) $ax+by=c$ Diofant tenglamasining butun sonlar bilan ifoda qilingan bir juft ildizini topgan bo’laylik. Bu ildizlar $x=\alpha$ va $y=\beta$ bo’lsin, ularni berilgan tenglamaga qo’yib, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz: $a\alpha+b\beta=c$. Bu ayniyatni berilgan tenglamadan hadlab ayirsak, $a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$ bo’lib, bundan $ax=a\alpha-b(y-\beta)$ yoki $x=\alpha-\dfrac{b(y-\beta)}{a}$ kelib chiqadi. x ning butun son bo’lishi uchun $\dfrac{b(y-\beta)}{a}$ ifoda butun son bo’lishi zarur va yetarli (chunki α butun son). Boshqacha aytganda, $b(y-\beta)$ ifodaning a ga qoldiqsiz bo’linishi zarur va yetarlidir. Lekin, farazimizga binoan $(b,a)=1$, demak, $y-\beta$ ayirmaning a ga butun bo’linishi zarur (va yetarli). $y-\beta$ ni a ga bo’lishdan chiqqan butun bo’linmani t bilan belgilab (u musbat ham, manfiy ham bo’lishi mumkin), ushbuni hosil qilamiz:

$\dfrac{y-\beta}{a}=t$, bundan $y=\beta+at$ ni olamiz.

x ni ifodalovchi formulada $\dfrac{y-\beta}{a}$ kasr o’rniga t ni qo’ysak, $x=\alpha-bt$ hosil bo’ladi.

Shunday qilib, aniqmas tenglamaning ildizlari uchun quyidagi formulalarni hosil qildik:

$x=\alpha-bt$, $y=\beta+at$.

Bu formulalarda t ga ixtiyoriy butun musbat va manfiy qiymatlar berib, aniqmas tenglamaning cheksiz ko’p butun ildizlarini topamiz. Jumladan, $t=0$ bo’lganda yuqorida o’zimiz topgan $x=\alpha$ va $y=\beta$ ildizni topamiz.

Topilgan formulalarga diqqat qilib qaralsa, ularning quyidagi qoidaga binoan tuzilganini bilamiz:

1. Formulalarning birinchi hadi berilgan noma'lumning topilgan xususiy qiymati bo'ladi.

2. Formulalarning ikkinchi hadi berilgan tenglamaning koeffitsiyentlari bilan ixtiyoriy butun t sonning ko'paytmasidir, bunda x ni ifodalovchi formula uchun berilgan tenglamadagi y yonidagi koeffitsiyent, y ni ifodalovchi formula uchun esa x yonidagi koeffitsiyent olinadi.

3. Koeffitsiyentlardan biri teskari ishora bilan olinadi.

Koeffitsiyentlardan qaysi birini tenglamada turgan ishorasi bilan va qaysi birini teskari ishora bilan olishimizning hech qanday farqi yo'qligini ko'rish qiyin emas. Ҳaqiqatan ham,

$x = \alpha - bt$, $y = \beta + at$ va $x = \alpha + bt$, $y = \beta - at$

formulalar xuddi bir turli ildizlarni beradi, faqat birinchi formulalar t ning musbat qiymatlarida bergan yechimlarni ikkinchi formulalar t ning absolyut miqdor jihatidan ularga teng bo'lgan manfiy qiymatlarida beradi.

Misol. $3x + 5y = 26$ tenglama berilgan. Bevosita o'rniga qo'yish bilan $x = 2$ va $y = 4$ qiymatlarning tenglamani qanoatlantirishiga ishonch hosil qilamiz. U holda qolgan barcha ildizlar ushbu formulalardan topiladi:

$x = 2 + 5t$, $y = 4 - 3t$ yoki $x = 2 - 5t$, $y = 4 + 3t$.

Bu formulalarda t ga ixtiyoriy qiymatlar berib, tenglamaning butun sonlar bilan ifodalangan turli ildizlarini hosil qilamiz. Masalan, birinchi juft formulalarni olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

t	0	1	2	3	-1	-2	...
x	2	7	12	17	-3	-8	...
y	4	1	-2	-5	7	10	...

Agar ikkinchi juft formulalarni olsak, u holda t ga ketma-ket 0, -1, -2, -3, 1, 2, ... shunga o'xshash qiymatlarni berib, xuddi o'sha ildizlarni olgan bo'lar edik. Shunday qilib, aniqmas tenglamaning butun sonlar bilan ifodalangan ildizlarini topish masalasi qanday bo'lmasin, bir juft ildizni topishga keltiriladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. M.Isroilov "Sonlar nazariyasi asoslari" T."O`qituvchi" 2005y.
2. М.Виноградов. Основы теории чисел. М:.- Nauka, 1982 г. –С. 180
3. И.Г.Башмакова. Диофант и диофантовы уравнения. 1972 г. - С. 67