ПРИНЦИП КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ A-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
COMPACTNESS PRINCIPLE FOR A-ANALYTIC FUNCTIONS

Zhabborov Nasriddin Mirzoodilovich,
National University named after M. Ulugbek

Nematillaeva Muhayyo Davlatali qizi
National University named after M. Ulugbek

The purpose of this article is to study $A(z)-$analytic functions in the considered simply connected convex domain. It proves the principle of compactness for a normal family of $A(z)-$analytic functions.

1. Введение. Настоящая работа посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z)=A(z)\,f_z(z), \tag{1.1}$$

имеющего непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A(z)$, в общем случае предполагается, что она измерима и $\left|A(z)\right|\le C<1$ почти всюду в рассматриваемой области $D\subset\mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (1.1) принято говорить $A-$*аналитическими функциями.*

Пусть $A-$антианалитическая, $\partial A=0,$ в области $D\subset\mathbb{C}$ и такая, что $\left|A(z)\right|\le C<1,\ \ \forall z\in D.$ Положим

$$D_A=\frac{\partial}{\partial z}-\bar{A}(z)\frac{\partial}{\partial\bar{z}},\quad \bar{D}_A=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-A(z)\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

Тогда согласно (1.1) класс аналитических функций $f(z)\in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f(z)=0.$ Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой, то из [1] вытекает, что $O_A(D)\subset C^{\infty}(D).$

Теорема 1.4. (*Аналог теоремы Коши, см.*[4-5]). *Если* $f(z)\in O_A(D)\bigcap C(\bar{D}),$ *где* $D\subset\mathbb{C}$ *– область со спрямляемой границей* $\partial D,$ *то* $\int\limits_{\partial D} f(z)\big(dz+A(z)d\,\bar{z}\big)=0.$

Теперь мы предположим, что область D выпуклая и $\xi\in D-$ фиксированная ее точка. Рассмотрим функцию

$$K(z,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\overline{z-\xi+\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}}, \qquad (1.2)$$

где $\gamma(\xi,z)-$ гладкая кривая, соединяющая точек $\xi,z\in D.$ Так как область $D-$односвязная и $\bar{A}(z)-$функция голоморфная, то интеграл $I(z)=\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau$ не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной, $I'(z)=\bar{A}(z).$

Теорема 1.5. (см. [6]). $K(z,\xi)$ *является* $A-$*аналитической функцией вне точки* $z=\xi$, *т.е.* $K\in O_A(D\setminus\{\xi\}).$ *Более того, в точке* $z=\xi$ *функция* $K(z,\xi)$ *имеет полюс первого порядка.*

Замечание. Если область $D\subset\mathbb{C}$ не является выпуклой, а лишь односвязная, то хотя функция $\psi(z,\xi)=\overline{z-\xi+\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}$ однозначно определена в области D, но априори, она может иметь других изолированных нулей $\xi:\ \psi(z,\xi)=0,\ z\in P=\{\xi,\xi_1,\ \xi_2,...\}.$ Однако, $\psi\in O_A(D),\ \psi(z,\xi)\neq 0$ при $z\notin P$ и $K(z,\xi)$ является $A-$аналитической функцией в $D\setminus P.$ В связи с этим ниже мы рассматриваем класс $A-$аналитических функций только в выпуклых областях $D\subset\mathbb{C}$.

Согласно теореме [2] функция $\psi(z,\xi)\in O_A(D)$ осуществляет внутреннее отображение. В частности, множество $L(\xi,r)=\left\{z\in D:\ \ |\psi(z,\xi)|=\left|\overline{z-\xi+\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}\right|<r\right\},\ r>0,$

представляет собой открытое множество в D. Для достаточно маленьких r оно компактно принадлежит D и содержит точку ξ. Это множество называется $A-$*лемнискатой, с центром в точке* ξ и обозначается как $L(\xi,r)$. Она является односвязной областью (см. [6]).

Теорема 1.6. (Формула Коши, см. [5]). *Пусть* $D\subset\mathbb{C}$ *−выпуклая область и* $G\subset D-$ *произвольная подобласть с кусочно гладкой границей* $\partial G.$ *Тогда для любой функции* $f(z)\in O_A(G)\bigcap C(\bar{G})$ *имеет место формула*

$$f(z)=\int\limits_{\partial G}K(\xi,z)f(\xi)\left(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ \ z\in G. \qquad (1.3)$$

2. Функциональные ряды

Теорема 2.1. (*аналог теоремы Вейерштрасса* см. [7]). *Если ряд из* $A(z)$-*аналитических в области* D *функций*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\ ,\quad f_n(z)\in \mathrm{O}_A(D), \qquad (2.1)$$

сходится равномерно на любом компактном подмножестве этой области, то

1) $f(z)\in \mathrm{O}_A(D)$;

2) *ряд (2.1) можно почленно дифференцировать по* z:

$$\partial f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\partial f_n(z),\ \bar{\partial} f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\partial} f_n(z),\ D_A f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} D_A f_n(z) \qquad (2.2)$$

3) *ряды (2.2) сходятся равномерно на любом компактном подмножестве* D.

Сначала заметим, что аналогом степенных рядов для $A-$аналитических функций будут ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi^j(z,a),\ a\in D,\ c_j - \text{константы}. \qquad (2.3)$$

Областью сходимости ряда (2.3) будет лемниската $L(a,r)=\{|\psi(z,a)|<r\},$ где радиус сходимости r находится по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{r}=\overline{\lim_{j\to\infty}}\sqrt[j]{|c_j|}.$$

Ряд (2.3) согласно теореме 2.1 сходится равномерно и абсолютно внутри лемнискаты $L(a,r)$ и её сумма будет $A(z)-$аналитической функцией. Имеет место обратная

Теорема 2.2.(*см.*[6]). *Если* $f(z)\in O_A(L(a,r)),$ *где* $L(a,r)=\{\xi\in D:\ |\psi(\xi,a)|<r\}\subset\subset D-$*лемниската, то в* $L(a,r)$ *функция* $f(z)$ *разлагается в ряд Тейлора:*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi^k(z,a). \qquad (2.4)$$

Коэффициенты ряда определяются по формуле

$$c_k=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(z)}{\partial z^k}\bigg|_{z=a}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(a,\rho)}\frac{f(\xi)}{[\psi(\xi,a)]^{k+1}}\left(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ 0<\rho<r,\ k=0,1,\ldots.$$

Теорема 2.3. *Если функция* f *в лемнискате* $L(a,r)=\{|\psi(z,a)|<r\}\subset\subset G$ *представима как сумма степенного ряда*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_j\psi^k(z,a), \qquad (2.5)$$

то коэффициенты этого ряда определяются однозначно по формулам

$$c_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n}\bigg|_{z=a}.$$

Действительно подставляя в (2.5) $z=a$, найдем $f(a)=c_0$.

$$\frac{\partial\psi^n(z,a)}{\partial z} = n\psi^{n-1}(z,a)\frac{\partial\psi(z,a)}{\partial z} = n\psi^{n-1}(z,a). \qquad (2.6)$$

Берем от частные производные ряд (2.5) по z почленно:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = c_1 + 2c_2\psi(z,a) + 3c_3\psi(z,a)^2 + \dots$$

и затем подставляя $z=a$, найдем $\frac{\partial f(z)}{\partial z}\Big|_{z=a} = c_1$. Берем от частные производные по z ряд (17) n раз и использаем (18):

$$\frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n} = n!c_n + \frac{(n+1)!}{2!}c_{n+1}\psi(z,a) + \frac{(n+2)!}{3!}c_{n+2}\psi(z,a)^2 + \dots,$$

и снова подставим $z=a$ получим $n!c_n = \frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n}\Big|_{z=a}$.

Следовательно, е*сли* $f(z)\in O_A(L(a,R))$, *где* $L(a,r)=\{\xi\in D:\ |\psi(\xi,a)|<R\}\subset\subset D-$ *лемниската ,то верно следующие формуле :*

$$\frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n}\bigg|_{z=a} = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi,a)]^{n+1}}\left(d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ 0<\rho<R,\ n=0,1,\dots .$$

3. **Принцип компактности для A-аналитических функций**

Пусть $D\subset\mathbb{C}$ −выпуклая область и $G\subset D-$произвольная подобласть, с кусочно гладкой границей ∂G.

Определение 3.1. Семейство функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}\subset O_A(G)$, заданных в некоторой области G ,называется равномерно ограниченным внутри G , если для любом компакте $K\subset\subset G$ существует постоянная $M=M(K)$ такая, что

$$|f_\alpha(z)|\le M \qquad (3.1)$$

для всех $z\in K$ и всех $f(z)\in\{f_\alpha(z)\}$.

Теорема 3.1. Если Семейство функций $\left\{ f_\alpha(z) \right\}_{\alpha\in\Lambda} \subset O_A(G)$, равномерно ограничено внутри G, то и семейство производных $\left\{ f'_\alpha(z) \right\}$ также равномерно ограниченно внутри G.

Доказательство. Пусть $L(\xi,r)$-произвольный $A-$ лемнискате, $L(\xi,r) \subset\subset G$:

$$L(\xi,r) = \left\{ z\in D: \quad |\psi(z,\xi)| = \left| z-\xi+\overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)\,d\tau} \right| < r \right\}$$

и $r>0$; построим $L(\xi,r_1)$ $A-$ лемнискате $r_1>r$, что и $L(\xi,r_1)\subset\subset G$:

$$L(\xi,r_1) = \left\{ z\in D: \quad |\psi(z,\xi)| = \left| z-\xi+\overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)\,d\tau} \right| < r_1 \right\}.$$

Пусть $f_\alpha(z)\in\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$.По формуле Коши для $A-$аналитических функций производных в $\forall z\in L(\xi,r_1)$ имеем для любой $f_\alpha(z)\in\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$

$$\partial f_\alpha\big|_{z=\xi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(\xi,r_1)} \frac{f_\alpha(\xi)\left(d\xi + A(\xi)\,d\bar{\xi}\right)}{\left(\xi - z + \overline{\int_{\gamma(z,\xi)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(\xi,r_1)} \frac{f_\alpha(\xi)\left(d\xi + A(\xi)\,d\bar{\xi}\right)}{\left(\psi(\xi,z)\right)^2}. \quad (3.2)$$

Пусть теперь $z\in L(\xi,r)$, тогда $\forall\xi\in L(\xi,r_1)$ имеем $|\xi - z|\ge r_1 - r$ и, пользуясь равномерной ограниченностью семейства $\left\{ f_\alpha(z) \right\}_{\alpha\in\Lambda}$ получаем из (3.2)

$$|f'_\alpha(\xi)| = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(\xi,r_1)} \frac{f_\alpha(\xi)\left(d\xi + A(\xi)\,d\bar{\xi}\right)}{\left(\xi - z + \overline{\int_{\gamma(z,\xi)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^2} \right| \le \frac{r_1}{(r_1-r)^2} M\left(L(\xi,r_1)\right) = M_1\left(L(\xi,r)\right).$$

Доказана равномерной ограниченностью семейства $\left\{ f'_\alpha(z) \right\}_{\alpha\in\Lambda}$ в $L(\xi,r)$ $A-$ лемнискатах ($L(\xi,r)\subset\subset G$).

Любое множество $K\subset\subset G$ можно покрыть $A-$ лемнискатами $\left\{ L_\nu(\xi,r) \right\}$ компактно принадлежащими G. По теореме Гейне-Бореля из этого покрытия можно выбрать конечное $\left\{ L_\nu(\xi,r) \right\}_{\nu=1}^{k}$ $A-$ лемнискаты. Тогда, если обозначить

$$M_1(K) = \max_i M_1(L_\nu(\xi,r)) \qquad (\nu = 1,2,...,k),$$

то для $\forall z \in K$ и $\forall f_\alpha(z) \in \{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$ будем иметь

$$\left|f'_\alpha(z)\right| \le M_1(K).$$

Теорема доказано.

Определение 3.2. Семейство функций $\{f_\alpha(z)\}$, заданных в некоторой области G, называется равностепенно непрерывным внутри G, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого множества $K \subset\subset G$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что

$$\left|f(z'') - f(z')\right| < \varepsilon$$

для $\forall z'', z' \in K$ таких, что $|z'' - z'| < \delta$, и $\forall f \in \{f_\alpha\}$.

Теорема 3.2. Если Семейство функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda} \subset O_A(G)$, равномерно ограничено внутри G, то она и равностепенно непрерывно внутри G.

Доказательство. Пусть $K \subset\subset G$; по условии теорема $\forall z \in K$ и $\forall f_\alpha(z) \in \{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$ верна $\left|f_\alpha(z)\right| \le M(K)$. Обозначим через 2ρ расстояние между непересекающимся замкнутыми множествами $\overline{K}$ и ∂G т.е.

$$\inf|t - z| = \rho, \quad (\forall z \in K,\ \forall t \in \partial G)$$

и через

$$K^{(\rho)} = \underset{z\in K}{U}\left\{|\xi - z| < \frac{\rho}{2}\right\}$$

$\rho-$раздутие множества K. Так как, очевидно, $K^{(\rho)} \subset\subset G$, то по теорема 3.1 найдется постоянная M такая, что верно

$$\left|f'_\alpha(z)\right| \le M(K)$$

$$\forall z \in K^{(\rho)} \text{ и } \forall f_\alpha(z) \in \{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}.$$

Пусть z', z'' -две произвольные точки K такие, что $\left|z' - z''\right| < \frac{\rho}{2}$; тогда все точки z прямолинейного отрезка $\left[z', z''\right] \in K^{(\rho)}$ и, следовательно, для $\forall z \in \left[z', z''\right]$ и $\forall f_\alpha(z) \in \{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$ справедливо неравенство $\left|f'_\alpha(z)\right| \le M$. Поэтому для всех $f_\alpha(z) \in \{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$ мы имеем

$$\left|f_\alpha(z') - f_\alpha(z'')\right| = \left|\int\limits_{[z', z'']} f_\alpha'(z)dz\right| \le \int\limits_{[z', z'']} \left|f_\alpha'(z)\right||dz| \le M \cdot \left|z' - z''\right|.$$

Отсюда и для любого $\forall\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \min\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\varepsilon}{M}\right)$ для всех $z', z'' \in K$ таких, что $|z' - z''| < \delta$ и для $\forall f_\alpha(z) \in \{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$ выполняется

$$\left|f_\alpha(z') - f_\alpha(z'')\right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность семейство $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$ на G.
Теорема доказана.

Определение 3.3. Семейство функций $\left\{ f_\alpha(z) \right\}_{\alpha\in\Lambda} \subset O_A(G),$ называется нормальным, если любое его подсемейство $\left\{ f_\alpha(z) \right\}_{\alpha\in\Lambda_0},\ \Lambda_0 \subset \Lambda,$ содержит равномерно сходящаяся внутри G подпоследовательность $\left\{ f_j(z) \right\} \subset \left\{ f_\alpha(z) \right\}_{\alpha\in\Lambda_0} :\ f_j(z) \Rightarrow f(z),\ j \to \infty.$

Теорема 3.3 (Монтель)[6]. Локально равномерно ограниченное семейство $A-$аналитических функций $\left\{ f_\alpha(z) \right\}_{\alpha\in\Lambda} \subset O_A(G)$ образует нормальное семейство.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции, М., «Наука», 1988, 512 с.
2. Bers L. An outline of the theory of pseudoanalytic functions, Bull AMS, 1956, V. 62, no.4, pp.291-331.
3. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, *Монография,* 2012, 212 с.
4. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2014, №1, стр. 15-18.
5. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2016, №4, стр. 50-59.
6. Sadullaev A.,Jabborov N.M. On a class of A-analitic functions, Siberian Federal University, Maths&Physics, 2016 y 9(3), с. 374-383.
7. Zhabborov N.M. Morer's theorem and functional series in the class of *A*-analytic functions, Siberian Federal University, Maths&Physics, v. 11(1)2018, 50-59
8. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. ,Ш.Я. Хурсанов, Неравенство Шварца и формула Шварца для $A(z)$-аналитических функций, Современная математика.Фунламентальные направления. 2018,том 64, №4 с.637-649.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, М. Физматгиз, 1958г.