LAGRANJ FUNKSIYASIDAN FOYDALANIB BA'ZI MASALALARNI YECHISH HAQIDA

B.SH.Rahimov, A.R.Ne'matov, Sh.E.Fayzullayev
Jizzax Politexnika instituti
Oliy matematika kafedrasi assistenti

Ushbu ishda murakkab ko' rinishga ega bo'lgan yoki bir o' zgaruvchini ikkinchisi orqali oshkor holda ifodalab bo'lmasa, u holda shartli ekstremum masalasi Lagranj funksiyasi yordamida shartli ekstremumni topish oddiy ektremumni topishga keltirish haqida ba'zi masalalar keltirib o'tilgan.

Kalit so'zlar: funksiyaning xususiy hosilasi, ekstremum, Lagranj funksiyasi, tenglamalar sistemasi.

Kadirlar tayyorlash milliy dasturida qayt etilganidek, ta'lim sohasidagi davlat siyosati insonni intellektual va ma'naviy-axloqiy jihatdan tarbiyalash bilan uzviy bog'liq bo'lgan uzluksiz ta'lim tizimi orqali barkomol shaxsni shakllantirishni nazarda tutadi ana shu maqsadda biz quyida o' quvchilarda shartli ekstremum masalalarini oddiy ekstremum masalalariga keltirib yechishga doir ba'zi masalalar yechimlarini keltirib o'tamiz.

Lagranjning ko'paytuvchilar usuli bilan ekstremal nuqtalarini topish quyidagi hollarni o'z ichiga oladi:

1) Lagranj funksiyasini tuzish;

2) Lagranj funksiyasidan xususiy hosilalarni olib, ularni nolga teglashtirilib, funksiyaning ekstremumga ega bo' lishi mumkin bo' lgan nuqtalarni aniqlash;

3) ekstremumga ega bo' lgan nuqtalarni topib, funksiyaning bu nuqtadagi qiymati hisoblanadi

Birinchi masala. Berilgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan berilgan $Ax + By + C = 0$ to' g' ri chiziqqacha bo' lgan eng qisqa masofani topish masalasini qaraymiz.

L to' g' ri chiziqda qo'zg'aluvchi $M(x, y)$ nuqta va $M_0(x_0, y_0)$ nuqtalar orasidagi $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ masofani minimallashtiramiz

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \rightarrow min \qquad (2)$$

Ko'p o'zgaruvchili funksiyani ekstremumini topish uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F(x, y, \alpha) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \alpha(Ax + By + C) \qquad (3)$$

hosil bo' lgan funksiyadan birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - x_0) + \alpha A$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - y_0) + \alpha B.$$

Berilganlardan foydalanib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} 2(x - x_0) + \alpha A = 0 \\ 2(y - y_0) + \alpha B = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

(4) tenglamalar sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalardan x va y o'zgaruvchilarni $x = \frac{2x_0 - \alpha A}{2}$, $y = \frac{2y_0 - \alpha B}{2}$ topib, ularni sistemadagi uchinchi tenglamaga keltirib qo'yamiz

$$A \cdot \frac{2x_0 - \alpha A}{2} + B \cdot \frac{2y_0 - \alpha B}{2} + C = 0 \qquad (5)$$

(5) tenglamdan α ni topamiz

$$\alpha = \frac{2Ax_0 + 2By_0 + 2C}{A^2 + B^2} = \frac{2(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}.$$

Endi $d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ tenglamadagi x va y lar o' rniga

$x = \frac{2x_0 - \alpha A}{2}$, $y = \frac{2y_0 - \alpha B}{2}$ ifodalarni qo' ysak,

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (\frac{2x_0 - \alpha A}{2} - x_0)^2 + (\frac{2y_0 - \alpha B}{2} - y_0)^2$$

$d^2=\left(\frac{\alpha A}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha B}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}\,(A^2+B^2)$. (6)

Tenglik hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikdagi α ning qiymati $\alpha=\frac{2(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}$ ekanligini hisobga olsak,

$$d^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}\cdot(A^2+B^2)$$

$$d^2=\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$$

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Demak, berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan berilgan $Ax+By+C=0$ to' g'ri chiziqqacha bo' lgan eng qisqa masofa

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ga teng ekan.

Ikkini masala: $Ax+By+C_1=0$ va $Ax+By+C_2=0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

$(x_0;\ \frac{-Ax_0-C_1}{B})$ nuqta birinchi to'g'ri chiziqdan tanlangan ixtiyoriy nuqta bo'lsin, u holda bu nuqtadan ikkini to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa yuqoridagi formulaga asosan

$$d=\frac{\left|Ax_0-B\cdot\frac{Ax_0+C_1}{B}+C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0-Ax_0-C_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ekanligi onsongina kelib chiqadi.

Uchinchi masala:

Berilgan $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping. Bu yerda A,B,C va D lar berilgan haqiqiy sonlar.

Lagranj funksiyasi

$$F(x,y,z,\alpha)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\alpha(Ax+By+Cz+D)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2(x-x_0)+\alpha A=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2(y-y_0)+\alpha B=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2(z-z_0)+\alpha C=0\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(x-x_0)+\alpha A=0\\ 2(y-y_0)+\alpha B=0\\ 2(z-z_0)+\alpha C=0\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{2x_0-\alpha A}{2}\\ y=\frac{2y_0-\alpha B}{2}\\ z=\frac{2z_0-\alpha C}{2}\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

$$A\cdot\frac{2x_0-\alpha A}{2}+B\cdot\frac{2y_0-\alpha B}{2}+C\cdot\frac{2z_0-\alpha C}{2}+D=0$$

$$2x_0A-\alpha A^2+2y_0B-\alpha B^2+2z_0C-\alpha C^2+2D=0$$

oxirgi tenglamadan α ni topamiz

$\alpha = \frac{2(x_0A+y_0B+z_0C+D)}{A^2+B^2+C^2}$ (7)

Shartga ko‘ra

$$d^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = \left(\frac{2x_0-\alpha A}{2}-x_0\right)^2+\left(\frac{2y_0-\alpha B}{2}-y_0\right)^2+\left(\frac{2z_0-\alpha C}{2}-z_0\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}(A^2+B^2+C^2)$$

$$d^2 = \frac{\alpha^2}{4}(A^2+B^2+C^2).$$

Bundan $d = \frac{|\alpha|}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ bu tenglikning o‘ng tomonidagi α ni o‘ rniga (7) ni keltirib qo‘yamiz natijada

$$d = \frac{\left|\frac{2(x_0A+y_0B+z_0C+D)}{A^2+B^2+C^2}\right|}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \frac{|x_0A+y_0B+z_0C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

hosil bo‘ladi

Adabiyotlar:

1. Yo. U.Soatov. Oliy matematika. I-jild. “O‘ qituvchi”, Toshkent 1992-96 yil.
2. 2.P.E.Danko va boshqalar. Oliy matematika misol va masalalarda.Toshkent, 2007 yil.
3. Останов, К., Инатов, А., Химматов, И., Рахимов, Б., & Воробьев, Н. Н. (2018). О некоторых способах развития творческой активности учащихся при решении уравнений. *ББК 72 С108*.
4. Останов, К., Тураев, У. Я., & Рахимов, Б. Ш. (2019). ИЗУЧЕНИЕ ПОНЯТИЯ «СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА» И ЗАКОНЫ ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. *ББК 72 С127*.
5. Nematov Asliddin Rabbimkulovich, & Fayzullayev Sharofiddin Erkin oglu. (2021). USE OF TRIPLE INTEGRALS IN SOLVING MECHANICAL PROBLEMS FOR TECHNICAL STUDENTS. Archive of Conferences, 25(1), 10-13. Retrieved from https://www.conferencepublication.com/index.php/aoc/article/view/1063
6. Неъматов, А. Р., Рахимов, Б. Ш., & Тураев, У. Я. (2016). СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА. *Ученый XXI века*, 6.
7. Nematov, A. R., & Eshimova, M. K. Application of Integral Accounting in Architecture and Construction. *JournalNX*, 589-593.