ON SOME PROBLEMS OF EXTREME PROPERTIES OF THE FUNCTION AND THE APPLICATION OF THE DERIVATIVE AND METHODS FOR THEIR SOLUTION

Soatov Ulugbek Abdukadirovich
Jizzakh Polytechnic Institute, Associate Professor, Ph.D.
ulugbeksoatov595@gmail.com,, tel: (94) 573 17 68
Dzhonizakov Ulugbek Abduganievich
Jizzakh Polytechnic Institute, lecturer
udjonuzoqov@gmail.com,tel: (93) 293 59 70.

Abstract: The education of mathematical abilities and curiosity in students and students gifted in mathematics is important for the assimilation of all subjects. At the same time, the ability to use existing knowledge to solve mathematical problems of varying degrees of complexity develops their creative potential. This article deals with some problems of various contents concerning applications of derivatives, including extreme problems (maximum and minimum problems), problems solved using extreme properties, convexity and other properties of functions, as well as questions of proving various inequalities, methods for solving them.

Keywords: derivative of a function, monotonicity of a function, convexity of a function, problem, equation, inequality, non-standard problem, root, integer value, largest value, solution.

FUNKSIYANING EKSTREMAL XOSSALARI VA HOSILANING TATBIQIGA OID BA'ZI MASALALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI HAQIDA

Soatov Ulugbek Abdukadirovich
Jizzax politexnika instituti dotsenti, f-m.f.n.
ulugbeksoatov595@gmail.com, tel: (94) 573 17 68
Djonizaqov Ulug'bek Abdug'aniyevich
Jizzax politexnika instituti o'qituvchisi
udjonuzoqov@gmail.com,tel: (93) 293 59 70.

Annotatsiya: Matematikaga iqtidorli o'quvchi va talabalarda matematik qobiliyatlarni va izlanuvchanlikni tarbiyalash barcha fanlarni o'zlashtirishda muhimdir. Bunda turli mazmundagi qiyinlik darajasi yuqoriroq matematik masalalarni yechishda mavjud bilimlardan foydalana bilish ulardagi ijodkorlikni rivojlantiradi. Ushbu maqolada hosila tatbiqlariga oid turli mazmundagi ba'zi masalalar, jumladan ekstremal masalalar (maksimum va minimum masalalari), funksiyalarning ekstremal xossalaridan, qavariqligi va boshqa xossalaridan foydalanish orqali yechiladigan masalalar hamda turli xil tengsizliklarni isbotlash masalalari, ularni yechish usullari qaraladi.

Kalit so'zlar: Funksiya hosilasi, funksiya monotonligi, funksiya qavariqligi, masala, tenglama, tengsizlik, nostandart masala, ildiz, butun qiymat, eng katta qiymat, yechim.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ И МЕТОДАХ ИХ РЕШЕНИЯ.

Соатов Улугбек Абдукадирович
Джизакский политехнический институт, доцент, к.ф-м.н.
ulugbeksoatov595@gmail.com,тел: (94) 573 17 68
Джонизаков Улугбек Абдуганиевич
Джизакский политехнический институт, преподаватель
udjonuzoqov@gmail.com,tel: (93) 293 59 70.

Аннотация: Воспитание математических способностей и любознательности у учащихся и студентов, одаренных математикой, имеет важное значение для усвоения всех предметов. При этом умение использовать имеющиеся знания для решения математических задач различной степени сложности развивает в них творческий потенциал. В данной статье рассматриваются некоторые задачи различного содержания, касающиеся приложений производных, в том числе экстремальные задачи (задачи максимума и минимума), задачи, решаемые с использованием экстремальных свойств, выпуклости и других свойств функций, а также вопросы доказательства различных неравенств, методы их решения.

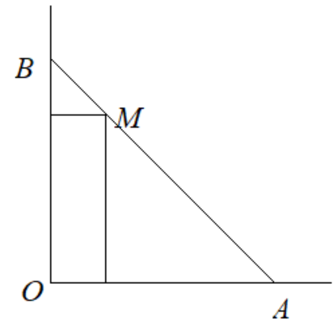
Ключевые слова: производная функции, монотонность функции, выпуклость функции, задача, уравнение, неравенство, нестандартная задача, корень, целое значение, наибольшее значение, решение.

Zamonaviy ta'limning eng muhim vazifalaridan biri shaxs tarbiyasida yangicha yondashuvni tashkil etishdir. Fikrlash va eng qulayi, eng yaxshisini izlash – bu insonning bebaho jihati bo'lib, bu jihat bolalikda va yoshlik davrida shakllanadi. Bu jarayonlarda o'quvchi va talabalarning ijodiy faollik, mustaqil fikrlash orqali bilimlarini turli masalalarni yechishga qo'llay olish ko'nikmalari rivojlanadi. Xususan, matematikaga iqtidorli o'quvchi va talabalarda matematik qobiliyatlarni va izlanuvchanlikni tarbiyalash barcha fanlarni o'zlashtirishda muhimdir. Bunda turli mazmundagi qiyinlik darajasi yuqoriroq matematik masalalarni yechishda mavjud bilimlardan foydalana bilish ulardagi ijodkorlikni rivojlantiradi. Shuningdek, hosila tushunchasi tatbiqlari yordamida turli mazmundagi ko'p masalalarni, jumladan murakkab masalarni yecha bilish - ta'lim oluvchilarning differensial hisob elementlaridan masalalarni yechishda keng foydalana olish ko'nikma va malakalarini shakllanganligini hamda matematik savodxonligini ko'rsatadi. Ushbu maqolada hosila tatbiqlariga oid ba'zi masalalar, jumladan ekstremal masalalar (maksimum va minimum masalalari), funksiyalarning ekstremal xossalaridan foydalanish orqali yechiladigan va turli xil tengsizliklarni isbotlash masalalari va ularni yechish metodlari qaraladi.

1.Ekstremal masalalarni yechishda hosilaning tatbiqlari.

1-masala. Uchlari to'g'ri burchak tamonlarida bo'lgan kesma shu burchak tamonlaridan *1* va *8* birlik masofalarda uzoqlashgan nuqtaga ega. Bunday kesmaning eng kichik uzunlikdagisini toping.

Yechish. Faraz qilaylik *OA=x*, *OB=y* (1-rasm). *x* va *y* larning o'zaro bogliqligini mos uchburchaklar o'xshashligidan hosil qilish mumkin, shunungdek $S_{OBA} = S_{OMA} + S_{OMB}$ tenglikga ko'ra $xy = 8x+y$. Bundan $y = \frac{8x}{x-1}$ yoki Pifagor teoremasiga ko'ra $AB^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{64x^2}{(x-1)^2}$. Masalani yechish uchun $f(x) = x^2 + \frac{64x^2}{(x-1)^2}$ funksiyaning eng kichik qiymatini topishimiz kerak bo'ladi. Bu funksiya hosilasini topib, uni nolga tenglaymiz. Natijada $2x + \frac{128x(x-1)^2 - 128x^2(x-1)}{(x-1)^4} = 0$ va uni ixchamlab $(x-1)^3 = 64$ yoki *x=5* ga ega bo'lamiz. U holda *f(x)* funksiyaning eng kichik qiymati AB^2 ga tengligidan $AB^2 = (x^2 + \frac{64x^2}{(x-1)^2})_{x=5} = 25 + \frac{64 \cdot 25}{16} = 125$. Bundan $AB = 5\sqrt{5}$ eng kichik uzunlikdagi kesmani topamiz.



2-masala. *O* nuqtada kesishuvchi ikki perpendikulyar to'g'ri chiziq bo'ylab *O* nuqtaga qarab ikkita kema harakatlanmoqda. Vaqtning biror momentida ikkala kema ham *O* nuqtadan *65 km* masofada bo'lishadi, birinchi kema tezligi - *15 km/soat*, ikkinchisiniki - *20 km/soat*. Birinchi kemadan *25 km/soat* tezlikda motorli qayiq suzib chiqadi.

a) Motorli qayiq qanday eng qisqa vaqtda birinchi kemadan ikkinchi kemaga suzub boradi?
b) Motorli qayiq qanday eng qisqa vaqtda birinchi kemadan ikkinchi kemaga suzib boradi va orqaga birinchi kemaga qaytib suzib keladi?

Yechish. a) Faraz qilaylik motorli qayiq, ikkala kema ham *O* nuqtadan *65 km* masofada va yo'lda *T soat* bo'lgan momentdan *x soat* dan keyin, jo'nagan bo'lsin, ya'ni motorli qayiq jo'nagan vaqtda birinchi kema *O* nuqtadan *65-15x* masofada, motorli qayiq yetib kelgan momentda ikkinchi kema *O* nuqtadan
65-20(x+T) masofada bo'lib, motorli qayiqning bosib o'tgan yo'li esa *25T km* bo'lsin. U holda $(65-15x)^2+(65-20(x+T))^2=(25T)^2$ tenglamaga ega bo'lamiz. Yoki soddalashtirishdan keyin:

$$25x^2 + 32Tx - 9T^2 - 9T^2 - 182x - 104T + 338 = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishga keladi.

Endi *T=T(x)* deb hisoblab, (1) tenglamaning ikkala tamonini *x* bo'yicha differensiallaymiz va *T'=0* deb faraz qilib (eng katta qiymatni izlaymiz) *25x+16T=91* tenglamani hosil qilamiz. Natijada,

$$\begin{cases} 25x^2 + 32Tx - 9T^2 - 182x - 104T + 338 = 0 \\ 25x + 16T = 91 \end{cases}$$

sistemani yechib, *x=3, T=1* ni topamiz. Shunday qilib, *T=1*, *T*-ning eng kichik qiymatidan iborat, chunki *x=0* da *T>1* mos keladi.

Biroq masalani analiz metodlarisiz ham yechish mumkin. (1) munosabatni

x –ga nisbatan kvadrat tenglama deb qarash mumkin. Uning diskriminanti T ga bog'liq bo'lib, manfiy bo'lmasligi shart va T ga nisbatan,
$D=481T^2-312T-169\geq 0$ tengsizlikni hosil qilamiz, bundan $T\geq 1$. Kvadrat uchhad masalaning b) qismini yechishga ham yordam beradi.

Faraz qilaylik motorli qayiq x_1 momentda jo'naydi, ikkinchi kemaga y momentda yetib keladi va x_2 momentda qaytadi. Motorli qayiqning suzish vaqti x_2-x_1. U holda ushbu ikkita munosabatni hosil qilamiz:
$(65-15x_1)^2+(65-20y)^2=25^2(y-x_1)^2$
$(65-15x_2)^2+(65-20y)^2=25^2(y-x_2)^2$
Shunday qilib , x_1 va x_2 lar $(13-3x)^2+(13-4y)^2=25(y-x)^2$
yoki $16x^2-2(2y-39)x+9y^2+104y-338=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari.

Bunda $x_2-x_1=\dfrac{\sqrt{D}}{16}$,

$$D=4((25-39)^2-16(9y^2+104y-338))=4(481y^2-3614y+6929)=52(37y^2-278y+533)$$

bo'lganligi uchun $y=\dfrac{139}{37}$, $D=52\cdot 400$ bo'lgan holda eng kichik qiymatga ega bo'ladi:

$$x_2-x_1=\frac{\sqrt{52\cdot 400}}{16}=\frac{5}{4}\sqrt{52}\ soat.$$

Javob: a). *1 soat*da; b). $\dfrac{5}{4}\sqrt{52}$ *soat*da.

2. a)Funksiyalarning ekstremal xossalaridan foydalanishga oid masalalar.

Ba'zi masalalarni yechishda qaralayotgan funksiyalarning ekstremal xossalaridan foydalanish qulay.

3-masala. Tenglamani yeching: $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}$.

Yechish. Ushbu tenglamani yechish uchun $a_1a_2+b_1b_2\leq\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$ tengsizlikdan foydalanamiz. Bu tengsizlikning geometrik ma`nosi quyidagicha: ikki $\vec{c}(a_1,b_1)$ va $\vec{d}(a_2,b_2)$ vektorlar skalyar ko'paytmasi ular modullari (uzunliklari) ko'paytmasidan oshmaydi. U umumiy holdagi Koshi-Bunyakovskiy tengsizli-gining $n=2$ dagi xususiy holi hisoblanadi. Tengsizlikdagi tenglik $\vec{c}(a_1,b_1)$ va $\vec{d}(a_2,b_2)$ vektorlar kollinear bo'lgan holda bajariladi.

Mazkur tengsizlikka ko'ra, $x\sqrt{1+x}+1\sqrt{3-x}\leq\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{(1+x)+(3-x)}=2\sqrt{1+x^2}$ ga ega bo'lamiz. Demak, $\vec{n}(x;1)$ va $\vec{m}\left(\sqrt{1+x};\sqrt{3-x}\right)$ vektorlar kollinear, yani $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$.

Bundan,

$$x\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1},\ x^3-3x+x+1=0\ \text{ yoki}$$

$$(x-1)(x^2-2x-1)=0,\ x_1=1,\ x_2=1+\sqrt{2},\ x_3=1-\sqrt{2}\quad \text{(oxirgi ildiz chet ildiz).}$$

4-masala. Tenglamani yeching: $\log_{6-x}\log_2 x=\log_{7-x}\log_2(2x)$.

Yechish. Berilgan tenglamani shakl almashtiramiz: $\dfrac{\lg\log_2 x}{\lg(6-x)}=\dfrac{\lg(\log_2 x+1)}{\lg(7-x)}$ yoki

$\frac{\lg(7-x)}{\lg(6-x)}=\frac{\lg(\log_2 x+1)}{\lg\log_2 x}$ yoki $\log_{(6-x)}(7-x)=\log_{\log_2 x}(\log_2 x+1)$.

$f(t)=\log_t(t+1)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyaning $t>1$ da monoton kamayuv-chi ekanligini ko'rsatamiz. Buni quyidagi usulda bajarish mumkin: $f(t)-1=\log_t(t+1)-1=\log_t\left(1+\frac{1}{t}\right)$. Natijada hosil bo'gan $\log_t(1+\frac{1}{t})$ funksiya kamayuvchi funksiyadan iborat (ya'ni asos o'sadi, logarifm belgisi ostidagi funksiya kamayadi).

Qaralayotgan tenglamamiz $f(6-x)=f(\log_2 x)$ ko'rinishga ega va demak $\log_2 x=6-x$ tenglikdan chapda o'suvchi, o'ngda kamayuvchi funksiya turganligi uchun yechim yagona: $x=4$.

Xulosa. Funksiya hosilasi, funksiyaning ekstremal xossalarini va ulaning tatbiqlariga oid tushunchalarni yaxshi o'zlashtirgan iqtidorli o'quvchi va talabalar doimiy va muntazam ravishda ushbu maqolada o'rganilgan ba'zi qiyinroq masalalarni yechish bilan shug'ullanib, o'z bilimlarini mustahkamlab borishlari orqali mavzu doirasidagi ko'plab konkurs masalalarini yecha olish ko'nikma va malakalariga ega bo'lishadi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Soatov U.A, Djonuzoqov U.A., Ekstremal masalalarni yechishda hosilaning tatbiqlari. //"Ишлаб чиқаришга инновацион технологияларни жорий этиш ва қайта тикланадиган энергия манбаларидан фойдаланиш муаммолари".// Республика илмий-техник анжумани материаллари тўплами, 1-том, ЖизПИ-2020 й., 10-11 aprel, 354-356 бетлар.
2. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2020). ABOUT THE ISSUES OF GEOMETRICAL INEQUALITIES AND THE METHODS OF THEIR SOLUTION. *European science*, (7 (56)).
3. Гадаев, Р. Р., & Джонизоков, У. А. (2020). ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ФРЕДГОЛЬМА ДВУМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА. *Наука и образование сегодня*, (12), 6-8.
4. И.Ф.Шарыгин, В.И. Голубев. Факультативный курс по математике. Решение задач. //Учебное пособие для 11 класса //, Москва, «Просвещение». 1991 .
5. В.С.Крамор. «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа», //Учебное пособие//, Москва, «Просвещение», 1990.
6. Sh.A.Alimov, Yu.M.Kolyagin va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. //O'rta maktabning 10-11- sinf uchun darslik.// -T.: "O'qituvchi", 2001.